Graphische Iteration

Vorkenntnisse

Im folgenden soll erklärt werden, wie man eine Funktion auf graphischem Wege Iterieren kann. Mit dieser Technik ist es mit einfachen Mitteln möglich, das verhalten eines eindimensionalen, dynamischen Systems zu untersuchen.

Wir betrachten im weiteren die Iteration einer Funktion f(x).

$$x_0 \to x_1 = f_\lambda(x_0)$$

Wir bestimmen somit die Folgeglieder durch einsetzen des direkten Vorgängers in eine Iterationsfunktion. Zum Beispiel die logistische Abbildung. Die Iterationsfunktion hängt in der Regel von einem zusätzlichen Systemparameter ab. Im Folgenden wird dieser mit λ bezeichnet.

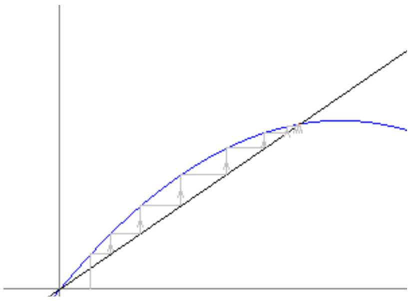
Ziele

- ☑ Sie können an einer beliebigen, stetigen Funktion eine graphische Iteration durchführen.

Aufgaben

Iterationen

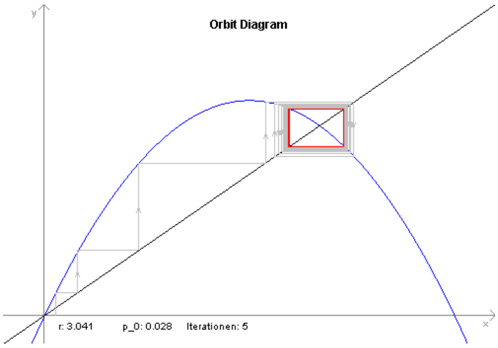
Wie funktioniert nun eine Iteration? Ein Startwert wird gewählt und auf der x-Achse eingezeichnet.

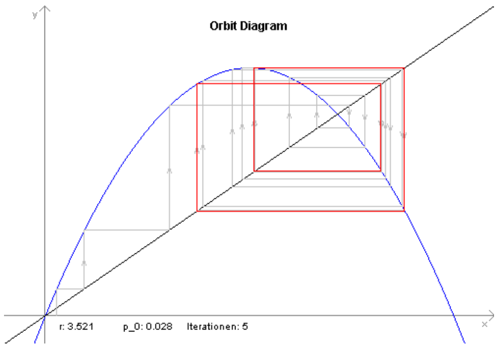


- ☑ vertikal zum Funktionsgraphen $y_i = f_\lambda(x_i)$
- ☑ horizontal zum $x_{i+1} = y_i$ Funktionsgraphen (neuer x_{i+1} -Wert).
- ☑ vertikal zum Funktionsgraphen $y_{i+1} = f_\lambda(x_{i+1})$
- ☑ und so weiter ...

Dieses hin-und herpendeln zwischen den beiden Funktionen $y = f_\lambda(x)$ und $y = x$, entspricht der grauen Zickzacklinie in der Graphik. Die vertikalen Linien entsprechen den x-Werten der Iterationsfolge.

Interessant wird die ganze Angelegenheit, wenn sich die beiden Funktionsgraphen schneiden. Was macht diese Zickzacklinie?



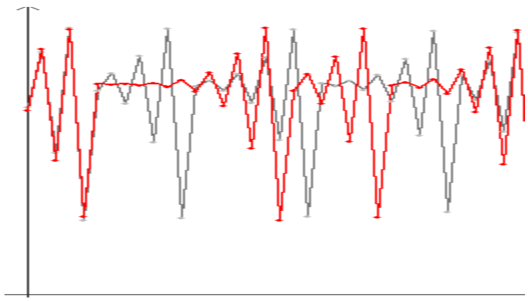


Die Werte können wie im ersten Bild auf einen Punkt zusteuern, oder zwischen 2 oder 4 Punkten hin- und herspringen oder ein ganz anderes Verhalten an den Tag legen.

1. Experimentieren Sie mit linearen Funktionen, welche Bedingung die Gerade erfüllen muss, damit die Iteration (Zickzacklinie) zum Schnittpunkt hinwandert?
2.

Schattenbahn

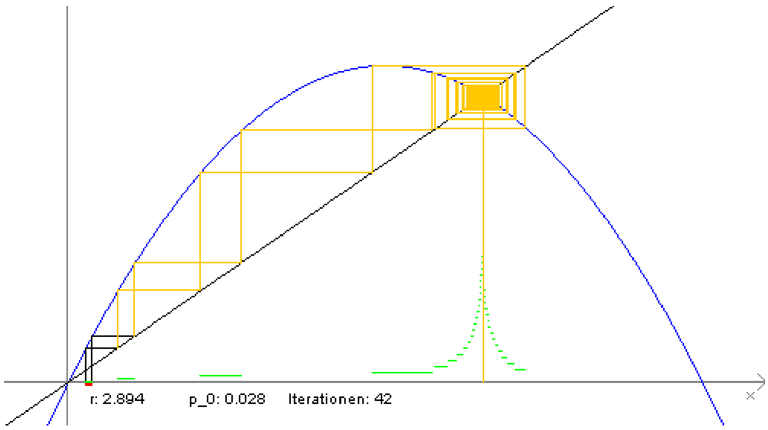
Mit einer Schattenbahn ist eine Iterationsfolge gemeint, welche bei einem Startwert beginnt, der sehr nahe am Startwert einer anderen Iterationsfolge beginnt. Eine solche zweite Bahn benutzt man, um zu untersuchen welchen Einfluss eine kleine Änderung des Startwertes zur Folge hat.



Ist das dynamische System nicht chaotisch, so bleiben die Bahn und ihre Schattenbahn in der Regel in der Nähe. Ein langsames auseinander streben ist allerdings zu erwarten.

Im oben stehenden Bild sieht man eine Bahn (rot) und eine Schattenbahn (grau). Die Startwerte unterscheiden sich minimal (1%). Allerdings schon nach sechs Iterationen klaffen die Bahnen signifikant auseinander.

Mit der Cobweb-Technik kann man dieses Verhalten ein wenig genauer Untersuchen als nur mit reinen Zeitreihen wie oben.



Auf der linken Seite sieht man ein kleines, rot markiertes Intervall. Dies sind die Startwerte der beiden Bahnen. Die grünen Intervalle zeigen an, auf welches Intervall der Startbereich iteriert wurde.

Im oben stehenden Diagramm wurde die Intervalle in den ersten Iterationen gestreckt, im Anschluss aber sprangen die Intervalle um einen Wert hin und her und wurden immer schmaler. Sie konvergierten gegen den Schnittpunkt der Identität $y=x$ und der Iterationsfunktion $y=f_\lambda(x)$.